

Goldstein

$$1.1. \quad \frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left[m \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} + m \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} \right]$$

$$= m \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} = \dot{\vec{p}} \cdot \vec{v} = \boxed{\vec{F} \cdot \vec{v}} \quad \text{if} \quad \frac{dm}{dt} = 0.$$

$$\frac{d(mT)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m^2 \vec{v} \cdot \vec{v} \right]$$

$$= \frac{1}{2} 2m \dot{m} \vec{v} \cdot \vec{v} + \frac{1}{2} m^2 \left[\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} \right]$$

$$= m \dot{m} \vec{v} \cdot \vec{v} + m m \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v}$$

$$= m \left[(\dot{m} \vec{v} + m \dot{\vec{v}}) \cdot \vec{v} \right]$$

$$= m \left[\dot{\vec{p}} \cdot \vec{v} \right] = \dot{\vec{p}} \cdot \vec{p} = \boxed{\vec{F} \cdot \vec{p}} \quad \text{if} \quad \frac{dm}{dt} \neq 0.$$

~~\Rightarrow~~ .